

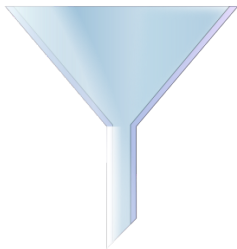
Introduction aux Mathématiques à rebours

Ludovic PATEY

3 février 2017



Mathématiques
infinitaires



PRA



Théorème

T

$$\begin{array}{ccc} \text{Axiomes} & & \text{Théorème} \\ A_1, \dots, A_n & \Rightarrow & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Axiomes} & & \text{Théorème} \\ A_1, \dots, A_n & \Leftarrow & T \end{array}$$

Arithmétique du second ordre

$$t ::= 0 \mid 1 \mid x \mid t_1 + t_2 \mid t_1 \cdot t_2$$

$$f ::= t_1 = t_2 \mid t_1 < t_2 \mid t_1 \in X \mid f_1 \vee f_2 \\ \mid \neg f \mid \forall x.f \mid \exists x.f \mid \forall X.f \mid \exists X.f$$

(Hilbert et Bernays)

Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **calculable** s'il existe un programme informatique qui, pour une entrée n , décide si $n \in A$.

Thèse de Church-Turing

Cette définition est indépendante du langage de programmation choisi.

Arithmétique de Robinson

1. $m + 0 = m$
2. $m + (n + 1) = (m + n) + 1$
3. $m \times 0 = 0$
4. $m \times (n + 1) = (m \times n) + m$
5. $m + 1 \neq 0$
6. $m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$
7. $\neg(m < 0) = m$
8. $m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$

Schéma de **compréhension**

$$\exists X \forall n (x \in X \Leftrightarrow \varphi(n))$$

pour toute formule $\varphi(n)$ où X est libre.

Hiérarchie arithmétique

- ▶ Σ_1^0 : définissable par une formule $\exists n.\phi$
- ▶ Π_1^0 : définissable par une formule $\forall n.\phi$
- ▶ Δ_1^0 : à la fois Σ_1^0 et Π_1^0

où ϕ est une formule ne contenant que des **quantificateurs bornés**.

Hiérarchie arithmétique

- ▶ Σ_1^0 : définissable par une formule $\exists n.\phi$
- ▶ Π_1^0 : définissable par une formule $\forall n.\phi$
- ▶ Δ_1^0 : à la fois Σ_1^0 et Π_1^0

où ϕ est une formule ne contenant que des **quantificateurs bornés**.

Calculable = définissable par un prédicat Δ_1^0

Schéma de **compréhension** Δ_1^0

$$\forall n(\varphi(n) \Leftrightarrow \psi(n)) \Rightarrow \exists X \forall n(x \in X \Leftrightarrow \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 où X est libre, et ψ est une formule Π_1^0 .

Schéma d'induction

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n\varphi(n)$$

pour toute formule $\varphi(n)$

Schéma d'induction Σ_1^0

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n\varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0

équivalent à

Schéma de compréhension bornée Σ_1^0

$$\forall p \exists X \forall n (x \in X \Leftrightarrow n < p \wedge \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 où X est libre.

Schéma d'induction Σ_1^0

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n\varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0

RCA₀

Arithmétique de Robinson

$$m + 1 \neq 0$$

$$m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$$

$$\neg(m < 0) = m$$

$$m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

$$m + 0 = m$$

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

$$m \times 0 = 0$$

$$m \times (n + 1) = (m \times n) + m$$

Schéma d'induction Σ_1^0

$$\begin{aligned} &\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)) \\ &\Rightarrow \forall n \varphi(n) \end{aligned}$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0

Schéma de compréhension Δ_1^0

$$\begin{aligned} &\forall n(\varphi(n) \Leftrightarrow \psi(n)) \\ &\Rightarrow \exists X \forall n(x \in X \Leftrightarrow \varphi(n)) \end{aligned}$$

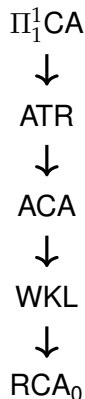
où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 où X est libre, et ψ est une formule Π_1^0 .

RCA_0 capture les mathématiques
calculables

$$\mathcal{M} = (\omega, \{X : X \text{ calculable} \}, +, \cdot, <)$$

Les mathématiques sont calculatoirement très structurées

Presque tous les théorèmes sont empiriquement équivalents à un parmi cinq ensembles d'axiomes.



PROBLÈME DE HILBERT

Justification des méthodes
infinitaires pour prouver le **fini**

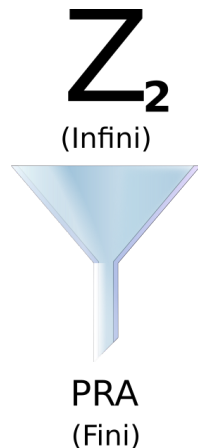
Réductionnisme finitaire :

$$T \vdash \varphi \Rightarrow PRA \vdash \varphi$$

pour φ une formule Π_1^0

*“Au moins 85% des mathématiques sont
réductibles à des méthodes finitaires”*

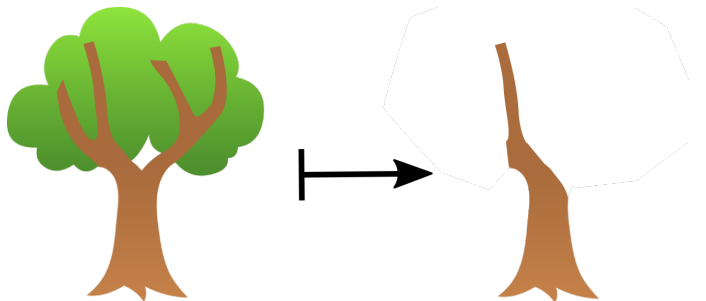
(Stephen Simpson)



Certains **théorèmes** peuvent être vus comme des **problèmes**.

Lemme de König

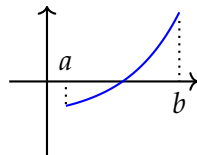
Tout **arbre infini à branchement fini** admet un **chemin infini**.



Certains théorèmes sont plus **calculables** que d'autres.

Théorème des valeurs intermédiaires

Pour toute **fonction continue** f sur un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$, il existe un **réel** $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.



Lemme de König

Tout **arbre infini** à **branchement fini** admet un **chemin infini**.

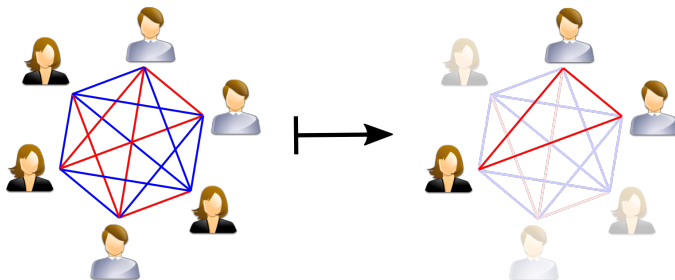


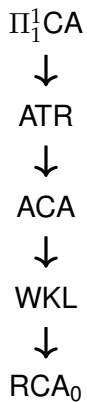
Q est au moins aussi difficile que P si

$$\text{RCA}_0 \vdash Q \rightarrow P$$

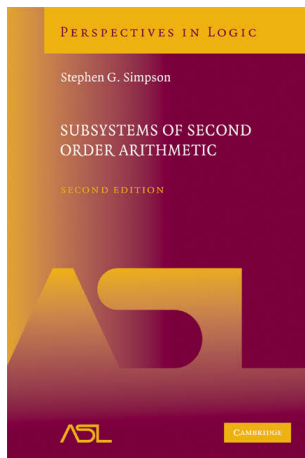
THÉORÈME DE RAMSEY

Tout k -coloriage des n -uplets d'entiers admet un ensemble infini monochromatique.

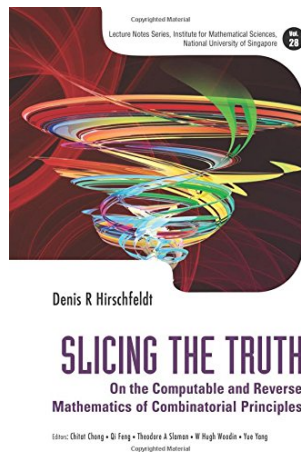








Subsystems of second-order arithmetic



Slicing the truth

RÉFÉRENCES



David Hilbert and Paul Bernays.
Grundlagen der Mathematik. I/Foundations of
mathematics. I. Part A. Prefaces and §§1–2.
College Publications, London, 2011.



Stephen G. Simpson.
Partial realizations of Hilbert's Program.
J. Symbolic Logic, 53(2) :349–363, 1988.



W. W. Tait.
Finitism.
Journal of Philosophy, 78(9) :524–546, 1981.