

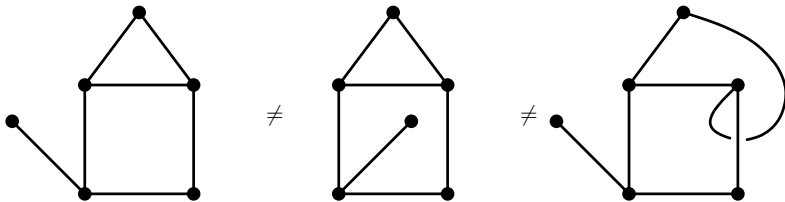
Compter les cartes combinatoires

Wenjie Fang
ancien doctorant de l'IRIF et du LaBRI
sous la direction de Guillaume Chapuy et Mireille Bousquet-Mélou

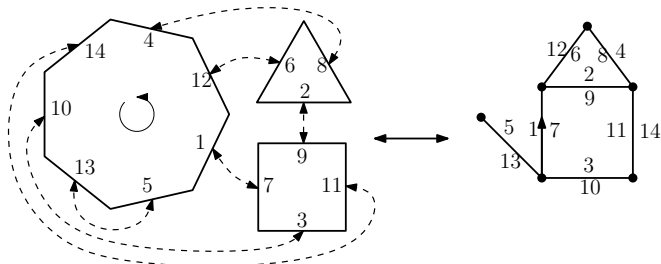
1 février 2018, Congrès de SIF

Cartes combinatoires

Une **carte** = un **graphe** + information du plongement



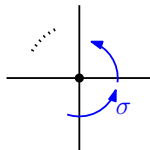
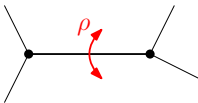
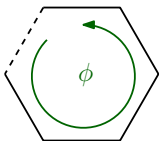
Un encodage des cartes, ...



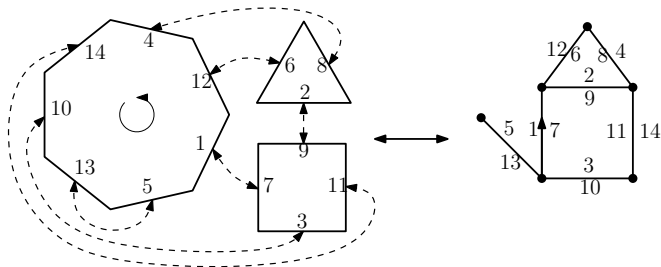
$$\phi = (1, 12, 4, 14, 10, 13, 5)(2, 8, 6)(3, 11, 9, 7)$$

$$\rho = (1, 7)(2, 9)(3, 10)(4, 8)(5, 13)(6, 12)(11, 14)$$

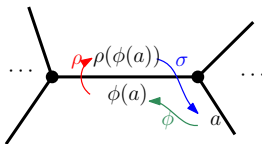
$$\sigma = (1, 9, 6)(2, 11, 4)(3, 14)(5, 10, 7)(8, 12)(13)$$



..., qui est une relation algébrique, ...



$$\begin{aligned} \phi &= (1, 12, 4, 14, 10, 13, 5)(2, 8, 6)(3, 11, 9, 7) \\ \rho &= (1, 7)(2, 9)(3, 10)(4, 8)(5, 13)(6, 12)(11, 14) \\ \sigma &= (1, 9, 6)(2, 11, 4)(3, 14)(5, 10, 7)(8, 12)(13) \\ \phi\rho\sigma &= \text{id} \end{aligned}$$



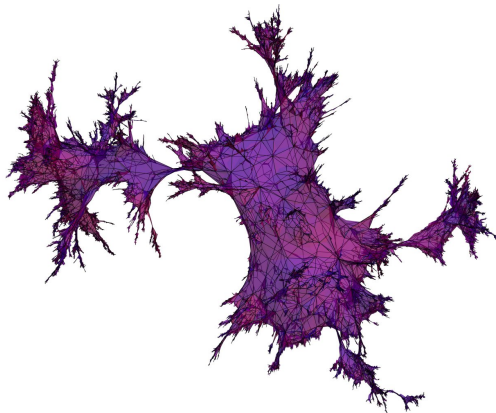
..., qui donne des liens algébriques

Cartes = factorisations dans le groupe symétrique

- Géométrie algébrique, *e.g.*, dessin d'enfant de Grothendieck
- Intégrales sur des matrices aléatoires en physique
- Certains systèmes intégrables (hiérarchie KP) en physique

Qu'est-ce qu'elle sert encore ?

Surface aléatoire, gravité quantique en 2D



Du site web de Jérémie Bettinelli

Un peu d'histoire

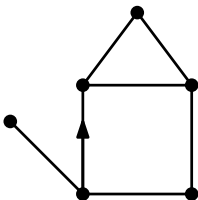
Comptage résout des problèmes !

- Une série d'articles de Tutte (1962–1963)
..... qui ouvre l'étude énumérative des cartes
- Intégrales matricielles (Brézin–Itzykson–Parisi–Zuber 1978)
..... qui relie les cartes à la physique quantique
- Arbres bourgeonnants (Bousquet-Mélou–Schaeffer 2000) et mobiles (Bouttier–Di Francesco–Guitter 2004)
..... qui ouvrent l'étude bijective des cartes, puis des cartes aléatoires
- Lien entre les cartes et la hiérarchie KP (Goulden–Jackson 2008)
..... qui renouvelle le lien avec les représentations de S_n
- Récurrence topologique (Eynard–Orantin 2009), inspirée par les intégrales matricielles
..... qui donne un outil puissant pour l'énumération des cartes

Beaucoup de méthodes et de liens !

Cartes enracinées

On **enracine** les cartes pour briser les symétries :
distinguer une arête (la **racine**) et l'orienter.
face racine (face extérieure) = la face à gauche de la racine



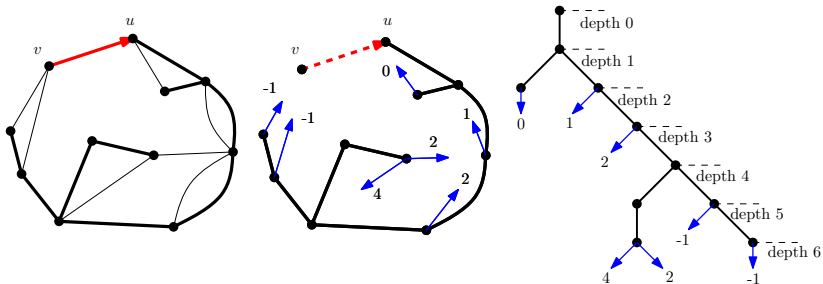
Ce que j'ai fait avec les séries

Série génératrice : encodage d'une infinité de comptage dans une seule fonction

- Une généralisation de la “relation de quadrangulation”
 - Série + théorie de representation
 - Cartes en genre supérieur = somme pondérée d'autres cartes en genre inférieur
- Énumération des cartes biparties en tout genre (avec Chapuy)
 - Série + idée de la *réurrence topologique*
 - Forme rationnelle des séries en tout genre ≥ 2
- Énumération des graphes cubiques plongeables dans une surface de genre g (avec Kang, Sprüssel, Moßhammer)
 - Série + combinatoire analytique + bijection
 - Premier étape à l'étude des graphes aléatoires avec contrainte de plongement

Bijection

Idee : un parcours casse la carte en un **arbre** avec des **décorations**



Bijection combinatoire \rightarrow énumération + compréhension structurelle

Mes contributions : bijection entre une famille de cartes planaires et certains intervalles du treillis Tamari (avec Préville-Ratelle)

Merci de votre attention !